Wavelets infinitamente oscilantes y un eficiente algoritmo de implementación basado en la FFT

Eduardo P. Serrano [*]y Marcela A. Fabio [**]

Palabras clave: wavelet tipo pasa-banda, algoritmo de Mallat, FFT, transformada de Hilbert, frecuencia instantánea.

Key words: band-pass wavelet, Mallat's algorithm, FFT, Hilbert transform, instantaneous frequency.

AMS Subjects Classification: 21A54 - 55P54

Resumen

La transformada wavelet (o en onditas) juega un relevante papel en las aplicaciones numéricas, principalmente en el campo del procesamiento de señales e imágenes, [3]-[4]. La transformada discreta basada en una wavelet ortonormal ψ, organiza la completa información de una señal f, en los respectivos coeficientes wavelets, localizados en tiempo y en escala.

Denotamos $\psi_{jk}(t) = 2^{j/2}\psi(2^j t - k)$ y $c_{jk}(f) =< f, \psi_{jk} >$.

La información contenida en tales coeficientes o átomos, puede procesarse posteriormente aplicando técnicas de filtrado, compresión o síntesis selectiva o mediante técnicas de reconocimiento de patrones para caracterizar fenómenos de compleja estructura.

Una cuestión siempre abierta en el campo de las aplicaciones numéricas es la elección de la wavelet madre ψ. Se pretende que la misma sea una función oscilante, bien localizada en tiempo y frecuencia y asociada con un eficiente cálculo numérico computacional.

Si la wavelet es ortogonal no es posible optimizar simultáneamente todas las propiedades requeridas y su elección dependerá del problema específico a resolver.

Usualmente se emplean las wavelets de Daubechies, ortogonales de soporte compacto, con un número finito de momentos nulos, pero de regularidad fraccionaria.

Otra opción son las wavelets splines de orden impar, afines, cúbicas o quínticas, muy eficientes desde el punto de vista computacional.

En ambos casos, el cálculo de los coeficientes se realiza mediante el algoritmo recursivo de Mallat, basado en la aplicación recursiva del par de filtros conjugados asociados a la relación de doble escala de la correspondiente función de escala.

Este algoritmo tiene la misma complejedad que el algoritmo FFT. Este esquema algorítmico puede extenderse a bancos de filtros para una mejor localización en frecuencia o pares de filtros de perfecta reconstrucción no ortogonales.

En algunas aplicaciones se requiere de wavelets infinitamente oscilantes, ortogonales, bien localizadas en tiempo y frecuencia. Un ejemplo esquemático de tales wavelets son la wavelet de Shannon o la wavelet de Meyer, estas son infinitamente oscilantes pero no están bién localizadas en el tiempo, siendo prácticamente inaplicables.

En la literatura [2] se propone calcular los coeficientes con la wavelet de Shannon en el dominio de las frecuencias utilizando la FFT.

Ésto no mejora la mala localización temporal de la transformada de Shannon, pero sugiere aplicar un esquema similar utilizando una especial tipo de wavelet denominada *pasa-banda*, [6].

[*]Centro de Matemática Aplicada, Universidad de San Martín y Escuela Superior Técnica del Ejército, I.E.S.E., Argentina, E-Mail: eduardo.eduser@gmail.com

[**]Centro de Matemática Aplicada, Universidad de San Martín y Escuela Superior Técnica del Ejército, I.E.S.E., Argentina,, E-Mail: mfabio@unsam.edu.ar

Con esta finaliadad presentamos en este trabajo el diseño de una wavelet ortogonal con las siguientes propiedades:

1. $\widehat{\psi}$ soportada en la banda bilátera $(\pi - \pi/m) < |\omega| < 2(\pi + \pi/m)$, con $m \geq 3$
2. $\widehat{\psi}$ es $\mathbb{C}^{n+1}$, con $n \geq 7$
3. $\{\psi_{jk},\ j, k \in \mathbb{Z}\}$ constituye una base ortonormal de $L^2(\mathbb{R})$.

Esta wavelet es infinitamente oscilante, localizada en el tiempo y decae como $\frac{1}{|t|^n}$. Puede ser empleada para el estudio de regularidad de señales, estimación de frecuencias instantáneas combinadas con la transformada Hilbert [6], o para descomponer en ondas del tipo funciones modales intrínsecas, cuasi-monocromáticas de frecuencia bien definida, [1].

Presentamos también el algoritmo para al análisis y la síntesis, basado en la FFT.

Referencias

[1] N.E. Huang et al., *The empirical mode decomposition and the Hilber spectrum for non-stationary tyme series analysis*, Proc. R. Soc. Lond. A 454, 1998.

[2] L. Ch. Li, *A New method of wavelet transform based on FFT for signal processing*, Second WRI Global Congres on Intelligent Systems, IEEE Computer Society, 2010.

[3] S. Mallat, *A Wavelet Tour of Signal Processing, The Sparse Way*, Academic Press,Elsevier, 2009.

[4] Y. Meyer, *Wavelets, Algorithms and Applications*, SIAM, Philadelphia, 1993.

[5] E. Serrano, M. Fabio, *Diseño de funciones elementales combinando la transformada wavelet y la transformada de Hilbert*, UMA 2010, Tandil, Argentina, 2010.

[6] E. Serrano, M. Fabio, A. Aragón, *Caracterización de la frecuencia instantánea en señales tipo pasa-banda*, III MACI, Asociación Argentina de Matemática Aplicada, Computacional e Industrial. Bahía Blanca, Argentina, 2011.